Erinnerung:

Seien V und W euklidische Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

Proposition: Es gibt höchstens eine lineare Abbildung $f^*\colon W \to V$ mit der Eigenschaft

$$\boxed{\forall v \in V\ \forall w \in W\colon\ \langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle.}$$

Definition: Diese heisst die *Adjungierte (Abbildung) von f*, wenn sie existiert.

Proposition: Ist $\dim V < \infty$, so existiert die adjungierte Abbildung f^*. Genauer gilt für jede geordnete Orthonormalbasis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V

$$\boxed{\forall w \in W\colon\ f^*(w) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \langle f(b_i), w\rangle \cdot b_i.}$$

Proposition: Seien B eine geordnete Orthonormalbasis von V und B' eine geordnete Orthonormalbasis von W. Dann gilt

$$\boxed{{}_B[f^*]_{B'} \;=\; {}_{B'}[f]_B^T.}$$

Proposition: Für jede reelle $m \times n$-Matrix A ist die Adjungierte von $L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ für die jeweiligen Standardskalarprodukte gleich $L_{A^T} \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Bew.: L_A hat Darstellungsmatrix A.

$\Rightarrow L_A^*$ " " A^T

$\Rightarrow L_A^* = L_{A^T}$ qed

Bew.: $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $\forall w \in \mathbb{R}^m$

$$\langle L_A(v), w\rangle = \langle v, L_A^*(w)\rangle$$
$$\langle L_A(v), w\rangle = \langle Av, w\rangle = (Av)^T \cdot w = v^T \cdot A^T \cdot w = \langle v, L_{A^T}(w)\rangle$$

qed.

Beispiel: Jede orthogonale lineare Abbildung $f \colon V \xrightarrow{\sim} W$ hat Adjungierte $f^* = f^{-1}$.

f orthogonal $\Longleftrightarrow$ f Isom und $\forall v, v' \in V$: $\langle f(v), f(v')\rangle = \langle v, v'\rangle$.

Schreibe $f(v') = w$ $\Rightarrow$ $\forall v \in V$ $\forall w \in W$: $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^{-1}(w)\rangle$

$\Rightarrow f^{-1}$ ist Adjungierte von f.

Definition: Eine lineare Abbildung $f \colon V \to V$, die ihre eigene Adjungierte ist, heisst *selbstadjungiert.*

Beispiel: Ist B eine geordnete Orthonormalbasis von V, so ist $f \colon V \to V$ selbstadjungiert genau dann, wenn ihre Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$ symmetrisch ist.

Beispiel: Die Abbildung $L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist selbstadjungiert für das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn A symmetrisch ist.

10.14 Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen

Lemma 1: Alle komplexen Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix sind reell.

Bew.: $A = A^T$ reell. Sei $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass $x + iy$ EV zum EW $\alpha + i\beta$. $i = \sqrt{-1}$

$\Rightarrow$ x, y nicht beide 0. $\Rightarrow$ $\|x\|^2 + \|y\|^2 > 0$.

D.h. $A(x+iy) = (\alpha + i\beta)(x+iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ax = \alpha x - \beta y \\ Ay = \beta x + \alpha y \end{array} \right|.$$

$$\langle Ax, y\rangle = \langle \alpha x - \beta y, y\rangle = \underline{\alpha \langle x, y\rangle} - \beta \overbrace{\langle y, y\rangle}^{\|y\|^2}$$

$$\|$$

$$\langle x, Ay\rangle = \langle x, \beta x + \alpha y\rangle = \beta \underbrace{\langle x, x\rangle}_{\|x\|^2} + \underline{\alpha \langle x, y\rangle}$$

$$\Rightarrow \beta \cdot \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 0. \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha + i\beta \in \mathbb{R} \qquad \text{qed.}$$

Sei nun f ein selbstadjungierter Endomorphismus eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums V.

Lemma 2: Ist $\dim V > 0$, so besitzt f einen Eigenwert in $\mathbb{R}$.

Bew.: $\mathcal{B}$ ONB von V $\mathbb{R}v = \{\mu v \mid \mu \in \mathbb{R}\}$

$A := {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ symmetrische $n \times n$-Matrix, $n > 0$.

$\Rightarrow$ A hat einen EW in $\mathbb{C}$.

Lemma 1 $\Rightarrow$ dieser liegt in $\mathbb{R}$. $\Rightarrow$ ist EW von f. qed.

Lemma 3: Für jeden Eigenvektor $v \in V$ von f ist die Zerlegung $V = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^\perp$ invariant unter f, das heisst, es gilt $f(\mathbb{R}v) \subset \mathbb{R}v$ und $f((\mathbb{R}v)^\perp) \subset (\mathbb{R}v)^\perp$.

Bew.: $f(v) = \lambda v \Rightarrow f(\mathbb{R}v) \subset \mathbb{R}v$.

$\forall w \in (\mathbb{R}v)^\perp$: $\langle f(w), v\rangle = \langle w, f(v)\rangle = \langle w, \lambda v\rangle = \lambda \cdot \langle w, v\rangle = 0$ da $w \perp v$.

$\Rightarrow f(w) \perp v \Rightarrow f(w) \in (\mathbb{R}v)^\perp$. qed.

Spektralsatz: Für jeden selbstadjungierten Endomorphismus eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums V existiert eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von f.

Beweis: Induktion über $n := \dim(V)$. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ ONB von V aus EVen von f. qed.

$n = 0$ ✓

$n-1 \rightsquigarrow n$: Wähle EV $v \Rightarrow b_n := \frac{v}{\|v\|}$ ist normierter EV.

Wende IV an auf $V' := (\mathbb{R}v)^\perp$ und $f' := f|V'$. $\Rightarrow f'$ selbstadjungiert.

$\forall v', w' \in V'$: $\langle f'(v'), w'\rangle = \langle f(v'), w'\rangle = \langle v', f(w')\rangle = \langle v', f'(w')\rangle$

$\Rightarrow \exists$ ONB $(b_1, \dots, b_{n-1})$ von V' aus EVen von f'.

Folge: Jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums V ist $\boxed{\text{diagonalisierbar.}}$

Darstellungsmatrix $_B[f]_B$ ist Diagonalmatrix.

Geometrische Bedeutung: Die von den Vektoren in der obigen Orthonormalbasis erzeugten Geraden heissen *Hauptachsen von f*. Diese bilden ein kartesisches Koordinatensystem, in welchem f durch je eine Streckung um voneinander unabhängige reelle Faktoren in alle Koordinatenrichtungen beschrieben wird.

Hauptachsentransformation 1: Für jede reelle symmetrische Matrix A existiert eine orthogonale Matrix Q, so dass $Q^{-1}AQ = Q^TAQ$ Diagonalgestalt hat.

Bew:

$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist selbstadjungiert.

$B = (b_1, \dots, b_n)$ ONB aus EVen von L_A

$Q := (b_1, \dots, b_n)$ orthogonal

$_B[L_A]_B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q = \text{diagonal}$

$Q^TQ = I_n \Leftrightarrow Q^T = Q^{-1}$

$\Rightarrow Q^{-1}AQ = Q^TAQ$. qed.

Methode: Eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren findet man, indem zuerst anhand des charakteristischen Polynoms alle Eigenwerte bestimmt, dann zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums berechnet, auf die Basis jedes Eigenraums das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren anwendet, und zuletzt die so erhaltenen Basisvektoren zu einer Basis des Gesamtraums zusammenfügt.

Beispiel: Die reelle symmetrische Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ hat die reellen Eigenwerte $\dfrac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2+4b^2}}{2}$.

$$\det\begin{pmatrix} X-a & -b \\ -b & X-d \end{pmatrix} = (X-a)(X-d) - b^2 = X^2 - (a+d)X + (ad-b^2)$$

$$\text{EWe} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-b^2)}}{2} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2+4b^2}}{2}$$

Beispiel: Die reelle Matrix

$$A := \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 5 & -14 & 2 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix}$$

ist gleichzeitig symmetrisch und orthogonal. Ihr charakteristisches Polynom lautet $(X-1)(X+1)^2$; nach dem obigen Satz existiert also eine orthogonale Matrix Q mit

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die lineare Abbildung L_A setzt sich somit aus einer Punktspiegelung in einer Ebene und der Identität in der dazu orthogonalen Geraden zusammen. Konkret sind die Spalten von Q eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, zum Beispiel findet man

$$Q = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{30} & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{30} & -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{30} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

10.15 Normalform symmetrischer Bilinearformen

Eine reelle $n \times n$-Matrix A kann genauso gut einen Endomorphismus von $\mathbb{R}^n$ darstellen wie eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, nämlich

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto x^T A y.$$

Eine äquivalente Formulierung des Hauptachsentransformationssatzes ist daher:

Hauptachsentransformation 2: Für jede reelle symmetrische Matrix A existiert eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, bezüglich welcher die obige symmetrische Bilinearform Diagonalgestalt erhält.

Das heißt: $\exists Q$ orthogonal: $Q^T A Q$ Diagonalmatrix.

Definition: Eine symmetrische Bilinearform β auf einem reellen Vektorraum V heisst

(a) *nicht-ausgeartet* wenn $\forall v \in V \smallsetminus \{0\}\colon\ \exists\, w \in V\colon\ \beta(v,w) \neq 0$;

(b) *ausgeartet*, wenn $\exists\, v \in V \smallsetminus \{0\}\colon\ \forall w \in V\colon\ \beta(v,w) = 0$;

(c) *positiv definit*, wenn $\forall v \in V \smallsetminus \{0\}\colon\ \beta(v,v) > 0$.

(d) *positiv semi-definit*, wenn $\forall v \in V\colon\ \beta(v,v) \geqslant 0$.

(e) *negativ definit*, wenn $\forall v \in V \smallsetminus \{0\}\colon\ \beta(v,v) < 0$.

(f) *negativ semi-definit*, wenn $\forall v \in V\colon\ \beta(v,v) \leqslant 0$.

(g) *indefinit*, wenn $\exists\, v,w \in V\colon\ \beta(v,v) > 0 > \beta(w,w)$.

Eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix A heisst entsprechend, wenn die zugehörige Bilinearform die jeweilige Eigenschaft hat.

Bemerkung: Es ist β negativ definit genau dann, wenn $-\beta$ positiv definit ist. Analog für semidefinit, usw., sowie für A.

Sei β eine symmetrische Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V.

Satz: (a) Es existiert eine geordnete Basis von V, bezüglich welcher die Darstellungsmatrix von β eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen aus $\{+1, -1, 0\}$ ist.

(b) Die Anzahl d_0 der Diagonaleinträge 0 ist die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $V \to V^\vee$, $v \mapsto \beta(v, \ )$.

(c) Die Anzahl $d_\pm$ der Diagonaleinträge ± 1 ist die maximale Dimension eines Teilraums $U \subset V$, für den die Einschränkung $\pm\beta|_{U\times U}$ positiv definit ist.

(d) Insbesondere sind die Diagonaleinträge bis auf Vertauschung unabhängig von der in (a) gewählten Basis.

Definition: Das Tupel (d_+, d_-) oder (d_0, d_+, d_-) heisst die *Signatur von β*.
Die Zahl $d_+ + d_-$ heisst der *Rang von β*.
Die Zahl $d_+ - d_-$ heisst der *Index von β*.

Bew.: Wähle eine geordnete Basis B von V. $\Rightarrow$ $A := [\beta]_B$ symmetrisch.
$\Rightarrow$ $\exists Q$ orthogonal $Q^T A Q$ Diagonalmatrix. Ersetze B durch die von Q vermittelte Basis.
$\Rightarrow$ oBdA A Diagonalmatrix. Schreibe $A = \mathrm{diag}(\lambda_i \mu_i^2)_{i=1..n}$ mit $\lambda_i \in \{\pm 1, 0\}$, $\mu_i > 0$.
$D := \mathrm{diag}(\mu_i^{-1})_{i=1..n}$ $\Rightarrow$ $D^T A D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{i=1..n}$ $\Rightarrow$ (a).

Zusatz: Für jede geordnete Basis B von V ist

$$\left.\begin{array}{l} d_+ \text{ die Anzahl der positiven Eigenwerte von } [\beta]_B \text{ mit Vielfachheiten,} \\ d_- \text{ die Anzahl der negativen Eigenwerte von } [\beta]_B \text{ mit Vielfachheiten,} \end{array}\right\}$$

$d_+ + d_-$ der Rang von $[\beta]_B$.

oben hat $Q^T A Q$ die EWe $\lambda_i r_i^2$ für $i = 1 .. n$

$\quad \| $

$Q^{-1} A Q \quad \Rightarrow \quad A$ hat dieselben EWe.

Identifiziere V mit $\mathbb{R}^n$ so dass β einer Diagonalmatrix A entspricht.

$(v_1, .., v_n) \leftrightarrow (e_1, .., e_n)$

$$\left.\begin{array}{l} V_+ := \langle \{ v_i \mid \lambda_i = +1 \} \rangle \\ V_0 := \langle \{ v_i \mid \lambda_i = 0 \} \rangle \\ V_- := \langle \{ v_i \mid \lambda_i = -1 \} \rangle . \end{array}\right\} \Rightarrow V = V_+ \oplus V_0 \oplus V_- .$$

oBdA:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & & \\ \hline & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} & \\ \hline & & \begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

(b) $v \in \operatorname{Ker}(V \to V^\vee, v \mapsto \beta(v, w))$ $\qquad v \longleftrightarrow x \in \mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow \forall w: \beta(v, w) = 0$

$\Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n: x^T \cdot A \cdot y = 0$

$\Longleftrightarrow \forall i: x^T A e_i = 0$

$\Longleftrightarrow \forall i: \lambda_i \neq 0: x^T e_i = 0 \Longleftrightarrow v \in V_0.$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(..) = d_0$

Rest Freitag.